



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 9-a
București, 13 februarie 2026
SUBIECTE

Problema 1

Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c \leq 4$ și $ab + bc + ca \geq 4$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$.

b) Arătați că sunt adevărate cel puțin două dintre inegalitățile

$$|a - b| \leq 2, |b - c| \leq 2, |c - a| \leq 2.$$

Problema 2

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Gazeta matematică

Problema 3

Considerăm predicatul $P(k, n): k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 1$, unde n și k sunt numere naturale, $k \geq 1$.

a) Arătați că propoziția $P(3, 1)$ este adevărată, iar propoziția $P(3, 2)$ este falsă.

b) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „pentru orice număr natural $k \geq 1$ există un număr natural n astfel încât propoziția $p(k, n)$ să fie falsă”.

Problema 4

Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC la BC , AC , respectiv AB .

a) Arătați că, dacă notăm cu p semiperimetrul triunghiului, atunci

$$a\overrightarrow{AD} = (p - c)\overrightarrow{AB} + (p - b)\overrightarrow{AC}.$$

b) Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.